

# Processamento de Sinais em Arranjos Multidimensionais de Sensores

Lucas Nogueira Ribeiro<sup>1</sup>, João César Moura Mota, André Lima Férrer de Almeida  
Grupo de Pesquisa em Telecomunicações Sem Fio (GTEL)  
Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, Brasil  
Emails: {nogueira, mota, andre}@gtel.ufc.br

**Resumo**—Processamento de sinais em arranjos de sensores é um campo de estudo com várias aplicações em telecomunicações. Técnicas clássicas de processamento ignoram a multidimensionalidade presente na geometria de arranjos, o que pode levar à redução do desempenho de processamento. Neste trabalho, apresentamos um modelo multidimensional de arranjos de sensores que permite o desenvolvimento de métodos de processamento mais eficientes.

## I. INTRODUÇÃO

Processamento de sinais em arranjos de sensores é uma área do estudo que tem sido bastante investigada devido à sua aplicabilidade em diversas áreas da Engenharia e da Ciência. Dentre os campos de estudo e aplicações que utilizam essa ferramenta, podemos citar: sistemas de telecomunicações, RADAR, SONAR, rádio astronomia, sismologia, engenharia biomédica, dentre outros [1]. Nessas aplicações, os sinais podem variar tanto no domínio temporal como no espacial. Por exemplo, considere-se um sinal senoidal oscilando com frequência radial  $\omega$  e número de onda  $k$  através do eixo  $z$  do sistema Cartesiano de coordenadas. Pode-se modelar esse sinal através da equação  $y(t, z) = \sin(\omega t + kz)$ , em que  $z$  denota uma certa posição no eixo  $z$ . Observa-se que a variação temporal do sinal está associada ao termo  $\omega t$ , enquanto  $kz$  está associado à variação espacial ou de fase do sinal. As técnicas clássicas de processamento de sinais assumem apenas um sensor posicionado em um determinado ponto do espaço. Dessa forma, a variação no domínio espacial do sinal é perdida. Uma forma de explorar esse domínio consiste em distribuir um arranjo de sensores em diferentes pontos do espaço. Dessa modo, o sinal  $y(t, z)$  é amostrado no espaço. Assim como no domínio temporal, os sensores devem ser posicionados de forma que o critério de Nyquist seja obedecido e assim não ocorra ambiguidade (*aliasing*) nas amostras.

Dois problemas fundamentais em processamento de sinais em arranjos são: estimação de parâmetros do arranjo e formatação do padrão de radiação do arranjo (*beamforming*). Os parâmetros de um arranjo incluem: número de sinais captados pelo arranjo e suas direções de chegada (*Direction of Arrival* - DOA). O padrão de radiação do arranjo pode ser formatado para visar os sinais de interesse e cancelar os interferentes. As primeiras técnicas de estimação de parâmetros e *beamforming* datam do período pós Segunda Guerra e são bastante rudimentares. Na década de 80, houve um grande avanço nessa área com o surgimento de algoritmos eficientes de estimação de parâmetros como o *MULTiple Signal Classification* (MUSIC) e o *Estimation of Signal Parameters via*

*Rotational Invariance Techniques* (ESPRIT) [2]. Esses métodos funcionam satisfatoriamente com arranjos lineares uniformes, onde apenas o ângulo de elevação do sinal de chegada em relação ao eixo do arranjo é estimado. Porém, o desempenho deles deteriora ao considerar arranjos multidimensionais, onde múltiplos parâmetros precisam ser estimados para determinar exatamente a direção das fontes.

Generalizações multidimensionais de métodos clássicos de processamento de sinais em arranjos foram propostos mais recentemente [3], [4]. Esses métodos incorporam a multidimensionalidade dos arranjos, permitindo decompô-los em subarranjos mais simples. Por exemplo, um arranjo retangular uniforme pode ser representado como o “produto” de dois subarranjos lineares nas direções dos eixos  $x$  e  $y$ , como ilustrado na Figura 1b. Assim, trabalha-se com os subarranjos ao invés do arranjo completo, permitindo o estabelecimento de métodos de processamento mais eficientes. Essa abordagem multidimensional é particularmente interessante em cenários com uma quantidade massiva de sensores, como previsto para a quinta geração de sistemas de telefonia móvel. De fato, a modelagem de processamento de sinais multidimensionais oferece diversas vantagens para sistemas de comunicações [5].

O modelo matemático de arranjos multidimensionais e o princípio dos métodos de estimação dos seus parâmetros serão apresentados a seguir.

## II. MODELOS

Primeiramente, o modelo clássico de sinais para arranjos de sensores será apresentado e, em seguida, a sua extensão multidimensional será introduzida. Considere-se um arranjo de  $N$  sensores isotrópicos distribuídos ao longo do eixo  $z$  do sistema Cartesiano e uniformemente espaçados por  $d$  metros. A posição do  $n$ -ésimo sensor é dada pelo vetor  $\mathbf{p}_n = [0, 0, (n-1)d]^T$ ,  $n \in \{1, \dots, N\}$ . Considere-se que  $R$  sinais de banda estreita atingem o arranjo. É assumido que os transmissores estão fisicamente distantes do arranjo mencionado, assim pode-se assumir que os sinais são ondas planas propagando com uma certa frequência radial  $\omega$  e número de onda  $k$ . O modelo apresentado não considera o ruído por conveniência de notação.

Seja  $s_r(t) = e^{j\omega t}$  o sinal transmitido pelo  $r$ -ésimo transmissor e  $\mathbf{d}_r = [\sin\theta_r \cos\phi_r, \sin\theta_r \sin\phi_r, \cos\theta_r]^T$  o seu vetor direcional unitário, em que  $\theta_r$  e  $\phi_r$  correspondem ao ângulo de elevação em relação ao semi-eixo  $z$  positivo e ao azimute, respectivamente. O sinal recebido pelo  $n$ -ésimo sensor é dado por

$$x_n(t) = \sum_{r=1}^R s_r(t - \tau_{n,r}) = \sum_{r=1}^R e^{j\omega(t - \tau_{n,r})} = \sum_{r=1}^R e^{-j\omega\tau_{n,r}} s_r(t),$$

<sup>1</sup>Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPQ, CAPES e FUNCAP.

em que  $\tau_{n,r} \triangleq \mathbf{p}_n^T \mathbf{d}_r / c = (n-1)d \cos \theta_r / c$  denota o atraso de fase no  $n$ -ésimo sensor em relação à  $r$ -ésima fonte e  $c$  a velocidade de propagação da onda. Portanto, o vetor de sinal recebido  $\mathbf{x}(t) = [x_1(t), \dots, x_N(t)]^T$  é dado por

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{r=1}^R \mathbf{a}(\mathbf{d}_r) s_r(t) \in \mathbb{C}^N, \quad (1)$$

em que  $\mathbf{a}(\mathbf{d}_r) \in \mathbb{C}^N$  denota a assinatura espacial do arranjo referente à  $r$ -ésima fonte e  $[\mathbf{a}(\mathbf{d}_r)]_n = e^{-j \frac{\omega}{c} (n-1)d \cos \theta_r}$  para  $n \in \{1, \dots, N\}$ . A Equação (1) pode ser sucintamente representada como  $\mathbf{x}(t) = [\mathbf{a}(\mathbf{d}_1), \dots, \mathbf{a}(\mathbf{d}_R)] [s_1(t), \dots, s_R(t)]^T = \mathbf{A}\mathbf{s}(t)$ . Discretiza-se  $\mathbf{x}(t)$  no tempo com taxa de amostragem  $T$  e obtém-se  $K$  amostras temporais, de forma que podemos agrupá-las na matriz  $\mathbf{X}$  com dimensões  $N \times K$  definida por

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}[\mathbf{s}(0), \dots, \mathbf{s}((K-1)T)] = \mathbf{A}\mathbf{S}. \quad (2)$$

Arranjos multidimensionais são aqueles que podem ser decompostos em subarranjos. Por exemplo, considere-se um arranjo planar uniforme distribuído no plano  $xy$  com  $N_x N_y$  sensores espaçados por  $d$ , como ilustrado na Figura 1a. O vetor de posição de um sensor localizado na linha  $n_x$  e coluna  $n_y$  do *grid* é  $\mathbf{p}_n = [(n_x - 1)d, (n_y - 1)d, 0]^T$ . Podemos escrevê-lo da seguinte forma:  $\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n_x}^{(x)} + \mathbf{p}_{n_y}^{(y)}$ , em que  $\mathbf{p}_{n_x}^{(x)} \triangleq [(n_x - 1)d, 0, 0]^T$  e  $\mathbf{p}_{n_y}^{(y)} \triangleq [0, (n_y - 1)d, 0]^T$ . Assim, a expressão do sinal recebido no  $n$ -ésimo sensor passa a ser expressa como:

$$x_{n_x, n_y}(t) = \sum_{r=1}^R s_r(t) e^{-j \frac{\omega}{c} (n_x - 1)d \sin \theta_r \cos \phi_r} e^{-j \frac{\omega}{c} (n_y - 1)d \sin \theta_r \sin \phi_r}.$$

Em forma matricial, temos:

$$\mathbf{X}(t) = \sum_{r=1}^R \left[ \mathbf{a}^{(x)}(\mathbf{d}_r^{(x)}) \circ \mathbf{a}^{(y)}(\mathbf{d}_r^{(y)}) \right] s_r(t) \in \mathbb{C}^{N_x \times N_y},$$

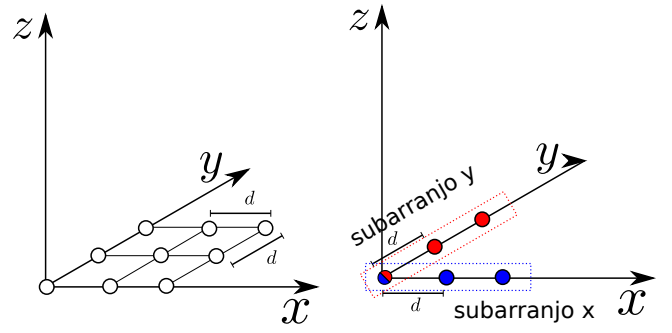
em que  $\circ$  denota o produto externo [6],  $[\mathbf{X}(t)]_{n_x, n_y} \triangleq x_{n_x, n_y}(t)$ ,  $[\mathbf{a}^{(x)}(\mathbf{d}_r^{(x)})]_{n_x} \triangleq e^{-j \frac{\omega}{c} (n_x - 1)d \sin \theta_r \cos \phi_r}$  e  $[\mathbf{a}^{(y)}(\mathbf{d}_r^{(y)})]_{n_y} \triangleq e^{-j \frac{\omega}{c} (n_y - 1)d \sin \theta_r \sin \phi_r}$ . Discretiza-se  $\mathbf{X}(t)$  no domínio do tempo e agrupa-se as matrizes obtidas no arranjo tridimensional (tensor de 3ª ordem) de sinais recebidos  $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_y \times K}$ , em que  $[\mathcal{X}]_{n_x, n_y, k} = [\mathbf{X}(kT)]_{n_x, n_y}$  para  $k = 0, \dots, K-1$ . Através de propriedades da Álgebra Multilinear [6], mostra-se que

$$\mathcal{X} = \mathcal{A} \times_3 \mathbf{S}^T, \quad (3)$$

em que  $\times_n$  denota o produto tensor-matriz através da dimensão  $n$ . O tensor  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{N_x \times N_y \times R}$  de assinaturas espaciais do arranjo é definido como [3]:

$$\mathcal{A} \triangleq \mathcal{I}_3 \times_1 \mathbf{A}^{(x)} \times_2 \mathbf{A}^{(y)}, \quad (4)$$

em que  $\mathcal{I}_3 \in \mathbb{C}^{N_x \times N_y \times R}$  denota o tensor identidade de 3ª ordem e  $\mathbf{A}^{(m)} \triangleq \left[ \mathbf{a}^{(m)}(\mathbf{d}_1^{(m)}), \dots, \mathbf{a}^{(m)}(\mathbf{d}_R^{(m)}) \right] \in \mathbb{C}^{N_m \times R}$  para  $m = x, y$ . Nota-se que (4) explicita a multidimensionalidade do arranjo nos seus dois eixos por meio de  $\mathbf{A}^{(x)}$  e  $\mathbf{A}^{(y)}$ .



(a) Arranjo planar uniforme. (b) Arranjo planar decomposto em dois subarranjos lineares.

Figura 1: Ilustração de um arranjo bidimensional e sua decomposição em dois subarranjos lineares.

### III. ESTIMAÇÃO DE PARÂMETROS

No problema de estimação de parâmetros de arranjos, busca-se estimar o número de fontes  $R$  e/ou os ângulos de chegada  $(\theta_r, \phi_r)$  para todas as fontes a partir das medições do arranjo. Métodos clássicos de estimação de parâmetros são baseados na decomposição em valores singulares (SVD) do modelo matricial (2). Por outro lado, métodos de estimação de parâmetros multidimensionais utilizam decomposições tensoriais flexíveis que simplificam as condições de identificabilidade dos parâmetros em relação aos métodos matriciais. Dentre essas decomposições, pode-se citar a decomposição poliádica canônica [6], que explora naturalmente as estruturas multidimensionais (3) e (4). Esses métodos oferecem diversas vantagens face aos métodos matriciais, como, por exemplo: condições de identificabilidade mais simples, capacidade de trabalhar com número reduzido de amostras e custo computacional inferior, principalmente em cenários massivos.

### IV. CONCLUSÃO

Processamento de sinais em arranjos de sensores multidimensionais é um campo de pesquisa recente bastante ativo. Conforme discutido neste artigo, métodos de processamento multidimensional são fundamentados na Álgebra Multilinear, uma ferramenta ainda em processo de amadurecimento e, portanto, oferecendo novos avanços. Em vista disso, surgem diversas oportunidades de aplicação dessa ferramenta para o desenvolvimento de métodos mais eficientes em problemas envolvendo arranjos multidimensionais, principalmente aqueles com uma quantidade vasta de sensores.

### REFERÊNCIAS

- [1] H. L. Van Trees, *Detection, estimation, and modulation theory, optimum array processing*. John Wiley & Sons, 2004.
- [2] H. Krim and M. Viberg, "Two decades of array signal processing research: the parametric approach," *IEEE Signal processing magazine*, vol. 13, no. 4, pp. 67–94, 1996.
- [3] F. Roemer, "Advanced algebraic concepts for efficient multi-channel signal processing," Ph.D. dissertation, Universitätsbibliothek Ilmenau, 2012.
- [4] L. N. Ribeiro, A. L. F. De Almeida, and J. C. M. Mota, "Tensor beamforming for multilinear translation invariant arrays," in *2016 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP)*. IEEE, 2016, pp. 2966–2970.
- [5] L. N. Ribeiro, J. C. M. Mota, and A. L. F. De Almeida, "Processamento Tensorial de Sinais Aplicado às Comunicações," *Revista de Tecnologia da Informação e Comunicação*, vol. 5, no. 2, pp. 14–18, Oct. 2015.
- [6] T. Kolda and B. Bader, "Tensor Decompositions and Applications," *SIAM Review*, vol. 51, no. 3, pp. 455–500, Aug. 2009.