

Estudo da Influência do Ruído na Fidelidade de Teleportação de Portas Quânticas

Francisco W. A. Cavalcante, Fernando V. Mendes, Fábio A. Mendonça

Resumo—Neste trabalho é estudado o efeito do ruído aditivo na representação por decomposição KAK de esquemas para teleportação de portas quânticas de 2 qubits.

Palavras-chaves—teleportação de portas quânticas, ruído, decomposição KAK, fidelidade

I. INTRODUÇÃO

Esquemas físicos que executam o teletransporte de portas e estados quânticos sofrem a ação de ruídos que influenciam o resultado final. Para estudar a influência do ruído aditivo no teletransporte de portas quânticas na representação por decomposição KAK, neste trabalho é calculada a fidelidade média entre os estados na saída considerando o circuito de teleporte da porta no caso ideal e com ruído aditivo. Na análise, foram considerados na entrada do circuito estados separáveis e gerais.

II. FIDELIDADE ENTRE ESTADOS DE 1 QUBIT OU 2 QUBITS SEPARÁVEIS

Estados quânticos de 1 qubit podem ser representados geometricamente na esfera de Bloch por um vetor $\vec{r}(x, y, z)$ cujas coordenadas são definidas de acordo com (1).

$$\begin{aligned} x &= \sin\theta\cos\varphi \\ y &= \sin\theta\sin\varphi \\ z &= \cos\theta. \end{aligned} \quad (1)$$

Para estudar a influência do ruído em um circuito quântico, pode-se adotar a medida de proximidade conhecida como fidelidade. Considerando que o estado na saída de um circuito quântico ruidoso seja ρ_{noise} e que no caso ideal (sem ruído) o estado seja ψ_{ideal} , ambos para um dado estado de entrada ψ_{in} genérico, a fidelidade entre os estados na saída é definida como sendo $F = \langle \psi_{ideal} | \rho_{noise} | \psi_{ideal} \rangle$.

No entanto, o estado de entrada ψ_{in} é desconhecido. Logo, é útil determinar a fidelidade média, que pode ser obtida usando (2), em que a fidelidade pontual é integrada na esfera de Bloch e o resultado é dividido pela superfície de uma esfera unitária.

$$F_m = \frac{1}{4\pi} \int F(x, y, z) dx dy dz. \quad (2)$$

Afim de representar 2 num sistema de coordenadas esféricas, usaremos o conceito de *determinante jacobiano* [1]. Assim, devemos obter uma expressão para o cálculo da fidelidade média em função de (r, θ, φ) ao invés de (x, y, z) . As expressões usadas na transformação são apresentadas em (3) e (4).

$$D_J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta. \quad (3)$$

$$dx dy dz = D_J d\theta d\varphi = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (4)$$

Para a esfera de Bloch, temos $r = 1$, logo $D_J = \sin \theta$. Portanto, o valor médio da fidelidade em coordenadas esféricas para todos os estados de 1 qubit possíveis é dado por (5).

$$F_m = \frac{1}{4\pi} \int F(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (5)$$

No caso de circuitos em que há na entrada estados de 2 qubits separáveis, a expressão para a fidelidade média pode ser obtida a partir da multiplicação das expressões para a fidelidade média de cada qubit [2]. Logo, para esse caso, a fidelidade média pode ser obtida usando (6).

$$F_{sep.} = \frac{1}{16\pi^2} \int F(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2) \sin \theta_1 \sin \theta_2 d\theta_1 d\varphi_1 d\theta_2 d\varphi_2. \quad (6)$$

III. FIDELIDADE ENTRE ESTADOS DE 2 QUBITS GENÉRICOS

Considere um estado ψ de 2 qubits genéricos, entrelaçados ou não, dado em termos de 4 amplitudes de probabilidade complexas como em (7).

$$|\psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|01\rangle + \gamma|10\rangle + \delta|11\rangle. \quad (7)$$

Em (8) temos a equação generalizada de uma hipersfera [3]:

$$S^{2n+1} = \{\vec{z} \in C^{n+1} : \|\vec{z}\| = 1\} \quad (8)$$

em que $n \in Z^+$. Como temos 4 amplitudes complexas, o valor de n é definido por: $n+1 = 4 \rightarrow n = 3 \rightarrow 2n+1 = 7$. Temos, portanto, uma hipersfera S^7 , num espaço vetorial R^8 . Em (9) são definidas as coordenadas hiperesféricas, em função de 7 ângulos $(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$ e $\theta_7)$.

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \theta_1 \\ x_2 &= \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ x_3 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \theta_3 \\ x_4 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \cos \theta_4 \\ x_5 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \cos \theta_5 \\ x_6 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \cos \theta_6 \\ x_7 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \sin \theta_6 \cos \theta_7 \\ x_8 &= \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4 \sin \theta_5 \sin \theta_6 \sin \theta_7 \end{aligned} \quad (9)$$

em que $\theta_k \in [0, \pi]$, para k variando de 1 a 6, e $\theta_7 \in [0, 2\pi]$.

Segundo [4], podemos escrever α, β, γ e δ em função das coordenadas hipersféricas, como em (10).

$$\begin{aligned}\alpha &= x_1 + ix_2 \\ \beta &= x_3 + ix_4 \\ \gamma &= x_5 + ix_6 \\ \delta &= x_7 + ix_8.\end{aligned}\quad (10)$$

Dessa forma, cada ponto da hipersfera S^7 corresponde a um estado de geral de 2 qubits. Para calcular a fidelidade média, no entanto, precisamos considerar todos os estados possíveis de 2 qubits. Isso pode ser feito integrando a função fidelidade na hipersfera S^7 . Afim de mudar as coordenadas de integração para os ângulos da hipersfera, foi usado o determinante jacobiano, tal como foi feito na seção II. Em (11) é apresentado o determinante jacobiano.

$$D_J = \left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)}{\partial(r\theta_1\theta_2\theta_3\theta_4\theta_5\theta_6\theta_7)} \right| \quad (11)$$

$$D_J = r^7 \sin^6 \theta_1 \sin^5 \theta_2 \sin^4 \theta_3 \sin^3 \theta_4 \sin^2 \theta_5 \sin \theta_6.$$

Já a área de uma hipersfera unitária S^7 é dada por $\pi^4/3$. Logo, a fidelidade média entre estados de 2 qubits genéricos é dada por (12).

$$F_{geral} = \frac{3}{\pi^4} \int F D_J d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4 d\theta_5 d\theta_6 d\theta_7. \quad (12)$$

A. Decomposição KAK para portas de 2 qubits

A decomposição KAK para portas $U \in SU(4)$ é definida como $U = (U_1 \otimes U_2)U_{NL}(U_3 \otimes U_4)$ [5].

Em (13) definimos a parte não local da transformação $SU(4)$ com ruído aditivo.

$$U_{eNL} = e^{i((\theta_X + a\epsilon_X) \cdot \sigma_{XX} + (\theta_Y + b\epsilon_Y) \cdot \sigma_{YY} + (\theta_Z + c\epsilon_Z) \cdot \sigma_{ZZ})} \quad (13)$$

em que $a, b, c \in \{0, 1\}$ simulam a presença de ruído no circuito de teleportação.

B. Fidelidade média na teleportação de portas com decomposição KAK

A tabela I mostra as expressões obtidas, com o auxílio do software Matlab, para as fidelidades médias considerando no circuito de teleportação a transformação não-local da expressão 13. Definindo a fidelidade média para o caso geral como F_{geral} e para o caso separável como $F_{sep.}$, as figuras 1 e 2 mostram os gráficos de $F_{geral} - F_{sep.}$, para 1 ou 2 dois ângulos com ruído.

IV. CONCLUSÃO

Na análise feita para o ruído nas componentes da decomposição KAK de uma transformação $SU(4)$, no esquema de teleporte de portas quânticas, verificou-se que as expressões obtidas para a fidelidade média dependiam do grau de entrelaçamento dos estados de entrada do circuito. Estados separáveis, com valor zero para a entropia de Von Neumann [6], dão origem a uma menor fidelidade média, se comparado com o caso geral, em que são considerados todos

Caso	Ângulos com ruído	
	1	2
Separável	$F_{sep.} = 1 - \frac{8}{9} \sin^2(\epsilon)$	$F_{sep.} = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} \cos^2(\epsilon_1) \cos^2(\epsilon_2)$
Geral	$F_{geral} = 1 - \frac{4}{5} \sin^2(\epsilon)$	$F_{geral} = \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cos^2(\epsilon_1) \cos^2(\epsilon_2)$

TABELA I
FIDELIDADE MÉDIA PARA 1 E 2 ÂNGULOS COM RUÍDO.

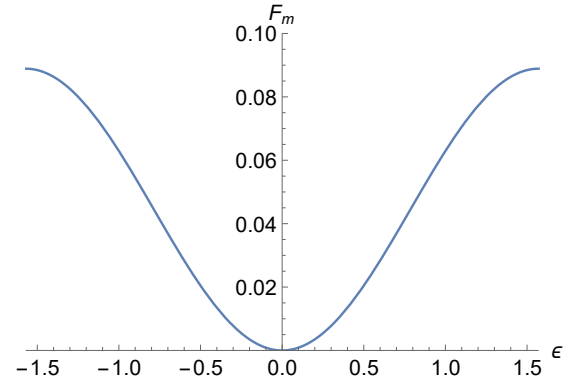


Fig. 1. Diferença entre F_{geral} e $F_{sep.}$ para um ângulo com ruído.

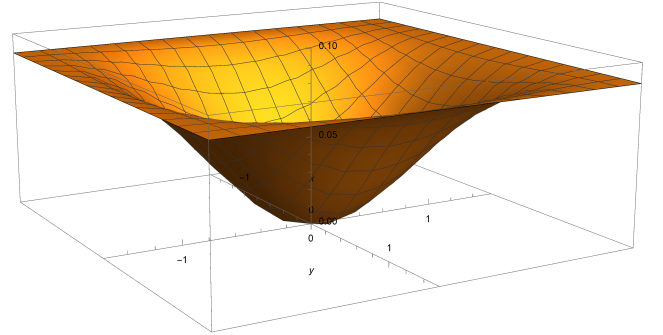


Fig. 2. Diferença entre F_{geral} e $F_{sep.}$ para dois ângulos com ruído.

os estados de 2 qubits possíveis, independente de seu grau de entrelaçamento. Além disso, conforme podemos observar nas figuras 1 e 2, quanto maiores os ângulos de ruído, maior é a diferença entre os dois casos.

REFERÊNCIAS

- [1] W. Kaplan, "Advanced calculus," 2002.
- [2] M. M. Wilde, *Quantum information theory*. Cambridge University Press, 2013.
- [3] L. Connellan, "Spheres, hyperspheres and quaternions," 2014.
- [4] I. Bengtsson and K. Życzkowski, *Geometry of quantum states: an introduction to quantum entanglement*. Cambridge University Press, 2007.
- [5] R. R. Tucci, "An introduction to cartan's kak decomposition for qc programmers," *arXiv preprint quant-ph/0507171*, 2005.
- [6] M. A. Nielsen and I. L. Chuang, *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010.